17. Kumar D., Baleanu D. Editorial: fractional calculus and its applications in physics // Front. Phys., 2019, vol. 7, № 6.
18. Yuldashev T. K., Abdullaev O. Kh. Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, vol. 42, no. 5, pp. 1113–1123.
19. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator // Ural Math. J. 2020, vol. 6, № 1, P. 153-167.
20. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral redefinition conditions // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, vol. 42, № 3, P. 649-662.
21. Yuldashev T. K., Karimov E. T. Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters // Axioms, 2020, vol. 9, № 4 (121), P. 1-24.
22. Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima // Наносистемы: физика, химия, математика, 2022, vol. 13, № 2, P. 135-141.

ПОТЕНЦИАЛЫ ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Арзикулов Зафаржон Одилович
Ферганский политехнический институт, базовый докторант
Хасанов Анварджан
Институт математики им. В.И.Романовского, главный научный сотрудник, д.ф.-м.н.(DSc), профессор,
Эргашев Тухтасин Гуламжанович
Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ», д.ф.-м.н.(DSc), профессор.

Аннотация
Многочисленные приложения теории потенциала можно найти в механике жидкости, эластодинамике, электромагнетизме и акустике. С помощью теории потенциала краевые задачи удаётся свести к решению интегральных уравнений.

Abstract
Numerous applications of potential theory can be found in fluid mechanics, elastodynamics, electromagnetism and acoustics. With the help of potential theory, boundary value problems can be reduced to solving integral equations.

Annotatsiya
Potensial nazariyaning ko'plab tadbiqlarini suyuqliklar mexanikasi, elastodinamika, elektromagnetizm va akustikada topish mumkin. Potensial nazariya yordamida chegaraviy masalalarni integral tenglamalarni yechishgacha keltirish mumkin.

Ключевые слова
Теории потенциала, гипергеометрической функции, интегральных уравнений.
Key words
Potential theory, hypergeometric function, integral equations.
Kalit so'zlar
Potensial nazariya, gipergeometrik funksiya, integral tenglamalar.

Введение

Потенциал двойного слоя играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических уравнений. При этом решение ищется в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью, для определения которой применяется теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В свою очередь такой потенциал выписывается через фундаментальное решение данного эллиптического уравнения.

Пусть $R_m^{2+} = \{(x_1,...,x_m) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ часть $m-$мерного евклидова пространства $(m \geq 2)$ точек $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$. В области $\Omega \subset R_m^{2+}$ рассмотрим уравнение

$$H_{\alpha_1,\alpha_2}^{m,\lambda}(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} - \lambda^2 u = 0, \quad (1)$$

где α_1 и α_2 - действительные числа, причем $0 < 2\alpha_1, 2\alpha_2 < 1$, а λ действительное или чисто мнимое постоянное.

Фундаментальные решения уравнения (1) были построены в [1]. Оказывается, когда $\lambda = 0$, все четыре фундаментальные решения уравнения

$$H_{\alpha_1,\alpha_2}^{m,0}(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \frac{2\alpha_1}{x_1} u_{x_1} + \frac{2\alpha_2}{x_2} u_{x_2} = 0 \quad (2)$$

можно выразить с помощью гипергеометрической функции Аппелла от двух переменных второго рода $F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; z, t)$, определенной по формуле [2]

$$F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; z, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a)_{i+j} (b_1)_i (b_2)_j}{(c_1)_i (c_2)_j \, i! \, j!} z^i t^j,$$

где $(a)_n -$ символ Похгаммера: $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdot ... \cdot (a+n-1)$, $n = 1, 2, 3, ...$

Теория потенциала для простейшего вырождающегося эллиптического уравнения $H_{0,\alpha_2}^{2,0}(u) = 0$ изложена в [3], а в работах [4,5] построена теория потенциала двойного слоя для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца (т.е. для уравнения (1) при $m = 2$ и $\lambda = 0$) в первой четверти плоскости. К теории потенциала для уравнения (2) при $m > 2$ посвящены сравнительно мало работ. К этому направлению исследований примыкают работы [6,7,8].

Сведение

В данной работе мы исследуем потенциал двойного слоя, соответствующий одному (первому) фундаментальному решению уравнения (2):

$$q_1(\xi,x)=k_1 r^{-2\alpha}F_2(\alpha,\alpha_1,\alpha_2;2\alpha_1,2\alpha_2;\sigma_1,\sigma_2), \quad (3)$$

где

$$k_1=\frac{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha)}{\pi^{m/2}\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)},\ \alpha:=\alpha_1+\alpha_2-1+m',\ m':=\frac{m}{2};\ \sigma_1=\frac{r^2-r_1^2}{r^2},$$

$$\sigma_2=\frac{r^2-r_2^2}{r^2};$$

$$\xi:=(\xi_1,...,\xi_m),\ r^2=\sum_{i=1}^{m}(\xi_i-x_i)^2,\ r_1^2=(\xi_1+x_1)^2+\sum_{i=2}^{m}(\xi_i-x_i)^2,$$

$$r_2^2=(\xi_2+x_2)^2+\sum_{i=1,i\neq 2}^{m}(\xi_i-x_i)^2.$$

Нетрудно проверить, что функция $q_1(\xi,x)$ по переменным $x:=(x_1,...,x_m)$ является решением уравнения (2) и обладает следующими свойствами:

$$\left.\frac{\partial q_1(\xi,x)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0,\ \left.\frac{\partial q_1(\xi,x)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=0. \quad (4)$$

Используя свойства гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных, доказываем предельные теоремы и выводим интегральные уравнения, содержащие в ядре плотность потенциала двойного слоя. Всюду в этой работе предполагается, что размерность пространства $m>2$.

Лемма 1. *Для любых точек x и $\xi\in R_m^{2+}$ при $\xi\neq x$ справедливо неравенство:*

$$|q_1(\xi,x)|\le C_1\frac{r_1^{-2\alpha_1}r_2^{-2\alpha_2}}{r^{m-2}}, \quad (5)$$

где C_1 - постоянная.

Доказательство. Возьмем фундаментальное решение (3). Применяя последовательно разложение [9]

$$F_2(a,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b_1)_i(b_2)_i}{(c_1)_i(c_2)_i}\frac{(xy)^i}{i!}\times$$
$$\times F(a+i,b_1+i;c_1+i;x)F(a+i,b_2+i;c_2+i;y) \quad (6)$$

и известную формулу [2]

$$F(a,b;c;x)=(1-x)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{x}{x-1}\right), \quad (7)$$

где

$$F(a,b;c;x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a)_i(b)_i}{(c)_i\, i!}x^i$$

- гипергеометрическая функция Гаусса, нетрудно получить оценку (5). Лемма 1 доказана.

Пусть Ω - конечная область в R_m^{2+}, ограниченная поверхностью Ляпунова Γ, открытыми частями Γ_1 и Γ_2 гиперплоскостей $x_1=0$ и $x_2=0$, соответственно. Границу области Γ_j обозначим через γ_j $(j=1,2)$.

Рассмотрим интеграл

$$w^{(1)}(x)=\int_\Gamma \xi_1^{2\alpha_1}\xi_2^{2\alpha_2}\mu_1(\xi)\frac{\partial q_1(\xi,x)}{\partial n_\xi}d_\xi\Gamma, \quad (8)$$

где $\mu_1(x)$ - непрерывная функция на поверхности $\bar{\Gamma}$. Здесь $\dfrac{\partial}{\partial n_\xi}$ означает нормальную производную относительно ξ.

Интеграл (8) будем называть *первым потенциалом двойного слоя с плотностью* $\mu_1(\xi)$. Очевидно, что $w^{(1)}(x)$ есть регулярное решение уравнения (2) в любой области, лежащей в пространстве $x_1>0$, $x_2>0$, не имеющем общих точек ни с поверхностью Γ, ни с гиперплоскостями $x_1=0$ и $x_2=0$. Как и в случае логарифмического потенциала, можно показать существование потенциала двойного слоя (8) в точках поверхности Γ для ограниченной плотности $\mu_1(\xi)$. При $\mu_1(\xi)=1$ потенциал двойного слоя (8) обозначим через $w_1^{(1)}(x)$.

Лемма 2. *Справедливы следующие формулы:*

$$w_1^{(1)}(x)=\begin{cases}-1, & x\in\Omega,\\ -\dfrac{1}{2}, & x\in\Gamma,\\ 0, & x\notin\bar{\Omega},\end{cases} \qquad (9)$$

где $\bar{\Omega}:=\Omega\cup\Gamma$.

Теорема 1. *Если поверхность Ляпунова* Γ *подходит к границам областей* Γ_1 *и* Γ_2 *под прямым углом, то*

$$\int_\Gamma \xi_1^{2\alpha_1}\xi_2^{2\alpha_2}\left|\frac{\partial q_1(\xi,x)}{\partial n_\xi}\right|d_\xi\Gamma\le C_2,$$

где C_2 *- постоянная.*

Доказательство следует из лемм 1-2.

Формулы (9) показывают, что при $\mu_1(\xi)\equiv 1$ потенциал двойного слоя терпит разрыв, когда точка x пересекает поверхность Γ. Вместе с тем, как мы сейчас увидим, при довольно широких условиях существуют пределы значений потенциала двойного слоя, когда точка x стремится к произвольной точке $\xi\in\Gamma$ либо изнутри, либо извне.

Имеет место

Теорема 2. *Потенциалы двойного слоя* $w^{(1)}(x)$ *имеют пределы при стремлении точки* x *к точке* s *поверхности* Γ *извне или изнутри. Если предел* *значений* $w^{(1)}(x)$ *изнутри обозначить через* $w_i^{(1)}(s)$, *а предел извне через* $w_e^{(1)}(s)$, *то для непрерывной плотности* $\mu_1(s)$ *имеют место формулы*

$$w_i^{(1)}(s)=-\frac{1}{2}\mu_1(s)+\int_\Gamma \mu_1(t)K_1(s,t)d_t\Gamma,\ \ w_e^{(1)}(s)=\frac{1}{2}\mu_1(s)+\int_\Gamma \mu_1(t)K_1(s,t)d_t\Gamma,$$

где

$$s=(s_1,s_2,...,s_m),\ t=(t_1,t_2,...,t_m),\ K_1(s,t)=t_1^{2\alpha_1}t_2^{2\alpha_2}\frac{\partial}{\partial n_t}\{q_1(t,s)\},$$

точки s *и* t *лежат на поверхности* Γ.

Доказательство теоремы 2 следует из лемм 1-2 и теоремы 1.

Заключение

Функции

$$w_0^{(1)}(s)=\int_\Gamma \mu_1(t)K_1(s,t)d_t\Gamma$$

непрерывны при $s\in\overline{\Gamma}$, что следует из хода доказательства теоремы 2. В силу результатов теоремы 1 и непрерывности функций $w_0^{(1)}(s)$ и $\mu_1(s)$ при $s\in\overline{\Gamma}$, следует, что потенциал двойного слоя $w^{(1)}(s)$ есть функция непрерывная внутри области Ω вплоть до поверхности Γ. Точно так же функция $w^{(1)}(s)$ непрерывна вне области Ω вплоть до поверхности Γ.

Литература

1. *Ergashev T.G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables//Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41, No.1. pp. 15 - 26.*
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973. 296 с.*
3. *Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.*
4. *Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца.//Вестник Томского гос университета. Математика и механика. 2017, № 50. С.45-56.*
5. *Srivastava H.M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. //Sohag Journal of Mathematics. 2015. 2, No.1. P. 1-10.*
6. *Ergashev T.G. Potentials for three-dimensional singular elliptic equation and their application to the solving a mixed problem//Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41, No. 6. pp. 1067 - 1077.*
7. *Ergashev T.G. Potentials for the Singular Elliptic Equations and Their Application. Results in Applied Mathematics. 2020, № 7, 100126. p. 1 - 15.*
8. *Эргашев Т.Г. Потенциалы двойного и простого слоев для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом и их применение. Известия ВУЗов. Математика. 2021, №1, С. 80-95.*
9. *Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell’s double hypergeometric functions. //Quart. J. Math. Oxford, 1940, Ser. 11. P.249-270.*