ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННОГО ТИПА ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ЯДРА

Холмирзаев Мамиржон Ахунжанович
Негосударственное ВУЗ Al Fraganus University Старший преподаватель,
Эргашева Дилдора Анваржон кызи
НИУ «ТИИИМСХ», ассистент

Аннотация

При решении задач математической физики иногда встречаются интегральные операторы первого рода с вольтеровскими ядрами представляющие собой композиции более простых, обратимых в явном виде операторов.

Abstract

When solving problems of mathematical physics, one sometimes encounters integral operators of the first kind with Voltaire kernels, which are compositions of simpler, explicitly reversible operators.

Annotatsiya

Matematik fizika masalalarini yechishda ba'zan Volter yadrolari bilan birinchi turdagi integral operatorlarga duch kelinadi. Ular oddiyroq, aniq qaytariluvchi operatorlardan iborat bo'ladi.

Ключевые слова

интегральное уравнение, ядро функция Гумберта, отрицательным параметр, интегральных уравнении, гипергеометрической функции.

Key words

integral equation, kernel function of Humbert, integral equation, hypergeometric function.

Kalit so'zlar

integral tenglama, Gumbert yadro funktsiyasi, manfiy parametr, integral tenglama, gipergeometrik funktsiya.

Введение

В качестве характерного примера таких уравнений композиционного типа в работе [1] было исследовано интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)} \Xi_2\left[q,1-q;p;\frac{x-t}{2x},\frac{\lambda^2 t(x-t)}{4}\right] f(t)dt = g(x), \quad (1)$$

содержащее в ядре функцию Гумберта

$$\Xi_2[a,b;c;x,y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \quad |x|<1,$$

где p и $q-$ действительные числа, а $\lambda-$ действительное и чисто мнимое число, и при определенных ограничениях на функции f и g (см. теорему) найдена формула обращения уравнения (1) в виде

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t^p \frac{(x-t)^{-p}}{\Gamma(1-p)}\times$$

$$\times\Xi_2\left[q,1-q;1-p;\frac{t-x}{2t},\frac{\lambda^2 x(t-x)}{4}\right]d\left(t^{1-p}g(t)\right),\ 0<q<p<1. \quad (2)$$

А именно имеет место следующая

Сведение

Теорема[1]. *Пусть* $p>0,\ g(x)\in AC([0,b)),\ b<\infty$, *и* $t^{q+1}g(t)\to 0,\ t^{2-q}g(t)\to 0$ *при* $t\to 0$. *Тогда уравнение (1) в классе функций* $f(x)\in AC([0,b)),\ b<\infty$, *для которых* $tf(t)\to 0$ *при* $t\to 0$, *обратимо по формуле (2).*

Здесь $AC([0,b))$ - класс абсолютно непрерывных функций на $[0,b),\ b<\infty$.

К формуле обращения (2) уравнения (1) можно прийти двумя способами:
рассмотрев решение другой краевой задачи для соответствующего гиперболического уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2q}{x}u_x-\frac{2p}{y}u_y+\lambda^2 u=0 \quad (3)$$

или же изучив структуру оператора (1).

При изучении задачи Коши-Гурса для уравнения (3) с отрицательными параметрами $-1<2p<2q<0$ также приходим к уравнению композиционно-го типа вида (1), но теперь уже с параметрами, выходящими за пределы указанных в формуле (2). В таком случае, очевидно, что формула обращения (2) не проходит.

В настоящем сообщении для уравнения (1), значения параметров которого не удовлетворяют условиям $0<q<p<1$, найдем несколько формул обращения.

Отметим, формула обращения интегрального уравнения (1) при отрицательных значениях параметров p и q, но при $\lambda=0$, найдена в недавний работе [2].

Пусть в уравнении (1) выполняются условия: $-1<q<0$ и $1<p<2$. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\int_0^x \frac{\left(x^2-y^2\right)^{-q}}{\Gamma(1-q)}dy\int_0^y \frac{(y-t)^{p+q-2}}{\Gamma(p+q-1)}\bar{I}_{p+q-2}\left[\lambda\sqrt{(y-t)t}\right]f(t)dt\ =(2x)^{-q}g(x),$$

где $\bar{I}_\alpha(z)$ - функция Бесселя-Клиффорда.

Берем производную с обеих сторон последнего равенства

$$2x\int_0^x \frac{\left(x^2-y^2\right)^{-q-1}}{\Gamma(-q)}dy\int_0^y \frac{(y-t)^{p+q-2}}{\Gamma(p+q-1)}\bar{I}_{p+q-2}\left[\lambda\sqrt{(y-t)t}\right]f(t)dt = 2^{-q}\left(x^{-q}g(x)\right)' \quad (4)$$

и с целью дальнейшего исследования левой части уравнения (4) введем обозначение

$$S\equiv\int_0^x \frac{\left(x^2-y^2\right)^{-q-1}}{\Gamma(-q)}dy\int_0^y \frac{(y-t)^{p+q-2}}{\Gamma(p+q-1)}\bar{I}_{p+q-2}\left[\lambda\sqrt{(y-t)t}\right]f(t)dt .$$

Изменяя порядок интегрирования, получим

$$S=\frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(p+q-1)}\times$$

$$\times\int_0^x f(t)dt\int_t^x \left(x^2-y^2\right)^{-q-1}(y-t)^{p+q-2}\,\bar{I}_{p+q-2}\left[\lambda\sqrt{(y-t)t}\right]dy.$$

Выполнив во внутреннем интеграле подстановку $y=t+(x-t)s$ и используя известное интегральное представление гипергеометрической функции $F(a,b;c;z)$ найдем

$$S=\int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{p-2}}{(x+t)^{q+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-t)^k t^k}{\Gamma(p+k-1)}\times$$

$$\times\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^k F\left(p+q+k-1,1+q;p+k-1;\frac{t-x}{t+x}\right)$$

Теперь, пользуясь формулами

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!(c)_k}F\left(a,b;c+k;x\right)=\Xi_2(a,b;c;x,t)$$

получим

$$S=(2x)^{-1-q}\int_0^x \frac{(x-t)^{p-2}}{\Gamma(p-1)}\Xi_2\left[-q,1+q;p-1;\frac{x-t}{2x},\frac{\lambda^2 t(x-t)}{4}\right]f(t)dt .$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-2}}{\Gamma(p-1)}\Xi_2\left[-q,1+q;p-1;\frac{x-t}{2x},\frac{\lambda^2 t(x-t)}{4}\right]f(t)dt = x^q\left(x^{-q}g(x)\right)' . \quad (5)$$

Со поставляя теперь уравнения (1) и (5), в случае $-1<q<0,\ 1<p<2$ и $1<p+q<2$, без труда находим формулу обращения интегрального уравнения (5) в виде

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t^{p-1}\frac{(x-t)^{1-p}}{\Gamma(2-p)}\Xi_2\left[-q,1+q;2-p;\omega,\rho\right]d\left(t^{2-p+q}\frac{d}{dt}\left(t^{-q}g(t)\right)\right) \quad (6)$$

Здесь и далее введены обозначения: $\omega = \dfrac{t-x}{2t}$, $\rho = \dfrac{\lambda^2 x(t-x)}{4}$.

Поступая аналогично, находим формулы обращения уравнения (1) в других пределах изменения параметров q, p и при определенных ограничениях на заданные функции f и g, исходящих из вышеизложенной теоремы.

Итак, имеют места следующие формулы обращения уравнения (1):
в случае $-1 < p < q < 0$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{-p}\frac{(x-t)^p}{\Gamma(1+p)}\Xi_2\left[-q,1+q;1+p;\omega,\rho\right]d\left(t^{1-p+q}\frac{d}{dt}\left(t^{-q}g(t)\right)\right);$$

в случае $-2 < p < q < -1$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{-p-1}\frac{(x-t)^{1+p}}{\Gamma(2+p)}\Xi_2\left[-q-1,2+q;2+p;\omega,\rho\right]d\left[t^{3-p+q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(t^{-q}g(t)\right)\right)\right];$$

в случае $-3 < p < q < -2$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{-p-2}\frac{(x-t)^{p+2}}{\Gamma(3+p)}\Xi_2\left[-q-2,3+q;3+p;\omega,\rho\right]d\left[t^{5-p+q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(t^{-q}g(t)\right)\right)\right)\right];$$

и, вообще, в случае $-n-1 < p < q < -n,\ n = 0,1,2,...$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{-p-n}\frac{(x-t)^{p+n}}{\Gamma(1+p+n)}\times$$

$$\times\Xi_2\left[-q-n,1+q+n;1+p+n;\omega,\rho\right]d\left[t^{2n+1-p+q}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}...\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\right.}_{n-раз}\frac{d}{dt}\left.\left(t^{-q}g(t)\right)\right)\right]. \quad (9)$$

Последнюю формулу обращения (9), например, можно доказать методом математической индукции.

Заключение

В заключении отметим, что формулы (5)-(6) играют важную роль при изучении задачи Коши-Гурса для уравнений смешанного типа второго рода, так как с помощью этих формул легко вывести второе функциональное соотношение между искомой функцией и её производной на линии вырождения, принесенное из гиперболической части смешанной области.

Литература

[1].Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения.// Минск, Наука и техника, 1987.-688 с.

[2]. Ergashev T.G., Komilova N.J. Volterra integral equations with Gaussian hypergeometric function in the kernel and their application to the boundary value problems//Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44, No.8.